Production of gravitational waves through electromagnetic radiation

1980 J. Phys. A: Math. Gen. 13 L371

(http://iopscience.iop.org/0305-4470/13/10/005)

J. Phys. A: Math. Gen. 13 (1980) L371–L374. Printed in Great Britain

LETTER TO THE EDITOR

Erzeugung von Gravitationswellen durch elektromagnetische Strahlung

K Buchner† und R Rosca‡

† Institut für Mathematik der Technischen Universität, Arcisstrasse 21, 8000 München 2, FDR

‡ Faculté des Sciences et Techniques, Sfax, Tunesien

Erhalten am 2 Juli 1980

Zusammenfassung. Ein axialsymmetrisches Bündel paralleler Lichtstrahlen mit endlichem Querschnitt erzeugt in seinem Außenbereich Gravitationswellen, deren Einsteinscher Energiekomplex im verwendeten Koordinatensystem ('Laborsystem') verschwindet. Einige Eigenschaften dieser Gravitationswellen werden mit den Ergebnissen aus anderen Lösungen verglichen.

Abstract. An exact solution of Einstein's equations is presented that corresponds to an axisymmetric bundle of electromagnetic waves with finite cross section. Outside this bundle, there is gravitational radiation parallel to the electromagnetic radiation. If no static electromagnetic fields are present, the frequency of the gravitational waves is twice the frequency of the electromagnetic waves. Einstein's energy complex vanishes identically. The covariant energy complex, however, yields also a radial momentum.

1. Einführung

Die Wechselwirkung zwischen elektromagnetischer und gravitativer Strahlung wurde mit Hilfe von Näherungslösungen der Einstein–Maxwellgleichungen ausführlich diskutiert (zB Choquet-Bruhaut 1977, Grishchuk und Polnarev 1980). Es sind außerdem zahlreiche exakte Wellenlösungen bekannt (zB Fischer 1980, Kundt 1961, Kundt und Trümper 1963). Trotzdem wurde bisher die Frage noch nicht ausreichend untersucht, ob auch außerhalb eines scharf begrenzten Bündels elektromagnetischer Strahlung Gravitationswellen auftreten. Die vorliegende Arbeit diskutiert den besonderes einfachen Fall eines axialsymmetrischen Bündels paralleler Lichtstrahlen, dessen Querschnitt begrenzt ist. Dabei zeigt sich, daß außerhalb des Bündels eine Gravitationsstrahlung vorhanden ist, deren Ausbreitungsrichtung der der Lichtstrahlen parallel ist. Die Frequenz der Gravitationswellen ist doppelt so groß wie die der elektromagnetischen Wellen. Durch geeignete statische Felder läßt sich jedoch auch die Grundfrequenz erzeugen. Der Einsteinsche Energiekomplex dieser Gravitationswellen verschwindet identisch.

2. Lösung der Übergangsbedingungen an der Grenzfläche des Bündels

In Rosca und Buchner (1980) wird gezeigt, daß sich für ein Bündel paralleler Lichtstrahlen die Lösungen der Einstein–Maxwellgleichungen in der folgenden Form darstellen lassen:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{14} \\ 0 & -1 & 0 & g_{24} \\ 0 & 0 & -1 & g_{34} \\ g_{14} & g_{24} & g_{34} & g_{44} \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit $g_{14} \in \mathbb{R}$; $g_{ik,1} = 0$ und $g_{24,3} = g_{34,2}$. Mit dieser Metrik reduzieren sich die Einsteinschen Gleichungen

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R = -\kappa T_{ik}$$

auf die eine Gleichung

$$g_{24,2,4} + g_{34,3,4} - \tfrac{1}{2}(g_{44,2,2} + g_{44,3,3}) = R_{44} = -\kappa[(F_{24})^2 + (F_{34})^2], \tag{2}$$

wobei F_{ik} die Komponenten des elektromagnetischen Feldes sind. Alle anderen Komponenten von T_{ik} verschwinden.

Bezeichnet $r = [(x^2)^2 + (x^3)^2]^{1/2}$ den Abstand vom Mittelpunkt des Bündels, so wird im folgenden angenommen, daß T_{44} sich als ein Produkt

$$T_{44} = T(r) \cdot G(x^4) \tag{3}$$

schreiben läßt. Dabei soll für $r \geqslant r_0$ gelten $T(r) = 0$. Für g_{ik} wird der Ansatz

$$g_{24} = x^2 f(r) g(x^4), \qquad g_{34} = x^3 f(r) g(x^4), \qquad g_{44} = k(r) m(x^4) \tag{4}$$

gemacht. Damit läßt sich die Einsteingleichung (2) folgendermaßen aufspalten, indem man zunächst willkürliche Funktionen $F_i(r)$ einführt:

$$\begin{aligned} &g_{24,2,4} + g_{34,3,4} = (2f + rf')\dot{g} =: F_1(r) \cdot G(x^4) && \text{für } r < r_0, \\ &g_{24,2,4} + g_{34,3,4} = (2f + rf')\dot{g} =: F_2(r) \cdot G(x^4) && \text{für } r \geqslant r_0, \\ &-\tfrac{1}{2}(g_{44,2,2} + g_{44,3,3}) = -\tfrac{1}{2}[k'' + (1/r)k']m = -\kappa T_{44} - F_1 \cdot G && \text{für } r < r_0, \\ &-\tfrac{1}{2}(g_{44,2,2} + g_{44,3,3}) = -\tfrac{1}{2}[k'' + (1/r)k']m = -F_2 \cdot G && \text{für } r \geqslant r_0. \end{aligned} \tag{5}$$

Dieses System hat die Lösungen

$$g(x^4) = \int^{x^4} G(s)\,\mathrm{d}s + K, \qquad m(x^4) = G(x^4), \tag{6}$$

$$f(r) = \frac{1}{r^2}(\phi_i(r) + K_i), \qquad h(r) = \frac{2}{r}(A(r) + \phi_i(r) + C_i),$$

mit $i = 1$ für $r < r_0$ bzw $i = 2$ für $r \geqslant r_0$ und $k, K_i, C_i \in \mathbb{R}$;

$$h(r) := k'(r), \qquad \phi_i(r) := \int_a^r sF_i(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$A(r) := \int_a^r s\kappa T(s)\,\mathrm{d}s \text{ für } r < r_0, \qquad A(r) = 0 \text{ fur } r \geqslant r_0 \quad \text{mit einem } a \geqslant 0.$$

Im folgenden wird $K = 0$ gesetzt; C_1 und K_1 bestimmen sich aus der Forderung nach der Stetigkeit von h und f an $r = 0$. Da die Metrik asymptotisch flach sein soll, ergibt sich C_2 aus dem Verhalten von A und ϕ_2 für große r. Die Stetigkeit von h und f an der

Grenzfläche $r = r_0$ liefert

$$\phi_1(r_0) - \phi_2(r_0) = C_2 - C_1 - A(r_0),$$
$$K_2 = \phi_1(r_0) - \phi_2(r_0) + K_1.$$

Schließlich folgt noch aus der Stetigkeit von f' an r_0 wegen (5) und der Stetigkeit von f:

$$F_1(r_0) = F_2(r_0).$$

In (5) sind die Funktionen $F_i(r)$ weitgehend willkürlich. Dies entspricht der bekannten Tatsache, daß in unserem Anfangswertproblem das Koordinatensystem für $r > r_0$ noch nicht eindeutig fixiert ist. Die Wahl der F_i ist jedoch durch die Forderung nach der asymptotischen Flachheit für $r \to \infty$ eingeschränkt. Ein einfaches Beispiel für die Lösung der Übergangsbedingungen liefert der Ansatz

$$F_1 = B, \qquad F_2 = D/r^3, \qquad B, D \in \mathbb{R}$$

mit

$$f(r) = \begin{cases} \dfrac{-A(r_0)}{3r_0^2} & \text{für } r < r_0, \\[2ex] \dfrac{2r_0 A(r_0)}{3r^3} - \dfrac{A(r_0)}{r^2} & \text{für } r \geq r_0, \end{cases} \qquad h(r) = \begin{cases} \dfrac{2}{r} A(r) - \dfrac{2}{3} \dfrac{A(r_0)}{r_0^2} r & \text{für } r < r_0, \\[2ex] \dfrac{4}{3} \dfrac{r_0 A(r_0)}{r^2} & \text{für } r \geq r_0, \end{cases}$$

mit $A(r) = \int_0^r \kappa s T(s)\, ds$.

Damit sind für beliebige Energie-Impulstensoren mit der radialen Verteilung $T(r)$ (siehe (3)) die Komponenten der Metrik gemäß (4) bestimmt, wenn $g(x^4)$ und $m(x^4)$ aus (6) entnommen werden. (Dabei wird vorausgesetzt, daß $(1/r)A(r)$ für $r = 0$ existiert.)

3. Diskussion

Die soeben angegebenen Lösungen für die Übergangsbedingungen der Einstein-Gleichungen sind bei großen Bündelquerschnitten, wo Beugungseffekte vernachlässigt werden können, auch eine gute Näherungslösung für die Maxwell-Gleichungen. Dabei ergibt sich folgendes.

(1) Im Vakuum, dh außerhalb des Lichtstrahlenbündels, sind Gravitationswellen vorhanden (x^4-Abhängigkeit von g_{ik}).

(2) Die Ausbreitungsrichtung dieser Gravitationswellen ist parallel zu den Lichtstrahlen.

(3) Wie schnell die Gravitationsstrahlung mit wachsendem Abstand vom Bündel der Lichtstrahlen abnimmt, hängt vom verwendeten Koordinatensystem ab (vgl Definition von $F_2(r)$!).

(4) Falls die Lichstrahlen monochromatisch sind, dh falls $G(x^4) \sim \sin^2(kx^4)$, ist die Frequenz der Gravitationswellen doppelt so groß wie die der elektromagnetischen Wellen ($m(x^4) = G(x^4) \sim 1 - \cos(2kx^4)$; $g(x^4) \sim x^4 - (1/2k) \sin(2kx^4)$). Ist noch ein konstantes elektro- magnetisches Feld mit den nichtverschwindenden Komponenten F_{24} und/oder F_{34} vorhanden, treten auch Gravitationswellen mit der Grundfrequenz (dh $g_{ik} \sim \sin kx^4$) auf Vgl auch de Sabbata (1977) (dort jedoch nur eine Näherungslösung!).

(5) Für monochromatische Lichtstrahlen ist

$$g(x^4) = \tfrac{1}{2} x^4 - (1/4k) \sin(2kx^4).$$

Streng monochromatische Lichtstrahlen bedingen also für $x^4 \to \infty$ die Divergenz von g_{24} und g_{34}; Lichtstrahlen endlicher Länge verursachen an jedem Raumpunkt, den sie passieren, eine permanente Änderung der Metrik (vgl zB Einstein und Rosen 1937, Sachs 1962).

(6) Im verwendeten Koordinatensystem verschwindet überall der kanonische Energiekomplex von

$$\mathscr{L} = \sqrt{-g}\, g^{sn}(\Gamma^k_{ls}\Gamma^l_{nk} - \Gamma^k_{lk}\Gamma^l_{ns}).$$

Dagegen liefert der Energiekomplex von $\mathscr{L} = \sqrt{-g}R$ auch einen Impuls in radialer Richtung, dessen Dichte proportional zu $g_{24,22} + g_{24,3,3}$ bzw zu $g_{34,2,2} + g_{34,3,3}$ ist.

Literatur

Choquet-Bruhaut Y 1977 *Proc. 1st Marcel Großmann meeting on general relativity* ed R Ruffini (Amsterdam: North-Holland)

Einstein A und Rosen N 1937 *J. Franklin Institute* **223** 43–54

Fischer E 1980 *J. Phys. A: Math. Gen.* **13** L81–4

Grishchuk L P und Polnarev A G 1980 in *General Relativity and Gravitation* vol 2 ed A Held (New York: Plenum)

Kundt W 1961 *Z. Phys.* **163** 77–86

Kundt W und Trümper M 1963 *Akad. Wissensch. Lit. Mainz, Abh. Math.-Nat. Kl. 1962* 965–1000

Rosca R und Buchner K 1980 *Preprint* München

de Sabbata V 1977 *Topics in theoretical and experimental gravitation physics* ed V de Sabbata und J Weber (New York: Plenum)

Sachs R 1962 *Proc. R. Soc.* A **270** 103–26